

**S1.**

a)  $\mathcal{B} = \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$  sınıfı,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir topoloji için baz oluşturur. Kanıtlayınız.

b)  $\mathcal{B} = \{[a, b) | a < b \text{ ve } a, b \in \mathbb{Q}\}$  sınıfı,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir topoloji için baz oluşturur. Kanıtlayınız. Bu topoloji alt limit (lower limit) topolojisi midir?

c)  $\mathcal{B} = \{[a, b) | a < b \text{ and } a, b \in \mathbb{R}\}$  sınıfı,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir topoloji için baz oluşturur mu?

**S2.**  $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$  ve  $\mathcal{B} = \{(a, b) | a < b \text{ ve } a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) - A | a < b \text{ and } a, b \in \mathbb{R}\}$ .  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir topoloji için baz oluşturur. Kanıtlayınız. Bu topoloji ve alışılmış topoloji arasındaki ilişki nedir?(eşit, güçlü, zayıf, hiçbirisi)

**S3.**  $\mathcal{T}$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde alt limit topolojisi olsun.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  topolojik uzayı birinci sayılabilir fakat ikinci sayılabilir değildir. Kanıtlayınız.

**S4.**  $n \in \mathbb{N}$  ve  $X$  eleman sayısı  $n$  olan bir küme olsun.  $\mathcal{T}$ ,  $X$  üzerinde ayrık topoloji olsun.  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  alt topluluğunun,  $\mathcal{T}$  için baz olabilmesi içinde en az kaç tane eleman olmalıdır?

**S5.**  $\mathbb{R}$  üzerinde alt limit topolojisi, alışılmış topolojiden daha güçlüdür. Kanıtlayınız.

**S6.**  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  olsun.

a)  $X$  üzerinde, farklı topolojiler üreten baz örnekleri yazınız.

b)  $X$  üzerinde, farklı topolojiler üreten alt baz örnekleri yazınız.

**S7.**  $x \in \mathbb{R}$  için  $\mathcal{B} = \{x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$  sınıfı,  $\mathbb{R}$  nin alışılmış topolojisine göre  $x$  için lokal bazdır. Kanıtlayınız.

**S8.**  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümesi üzerinde  $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}\}$  sınıfı bir topoloji için baz oluşturabilir mi?

**S9**  $(X, d)$  metrik uzay olsun.  $\mathcal{T}_d$ ,  $d$  tarafından üretilmiş topoloji olsun.  $\mathcal{T}$ ,  $X$  üzerinde sonlu tümleyen topoloji olsun.  $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$  doğru mudur? Açıklayınız.

**S10** Birinci sayılabilir olmayan bir topoloji örneği veriniz.