

**S1.**

a) Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $X_n = \{n, n+1, \dots\}$  kümeleri tanımlansın ve  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  düşünelim.  $\mathcal{T}$   $\mathbb{N}$  üzerinde topoloji olur mu?

b)  $\mathbb{N}$  kümesi üzerinde ayrık topoloji ve aşıkâr topoloji dışında bir topoloji örneği yazınız.

**S2.**  $X \neq \emptyset$  olsun.  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, U, V\}$ ,  $X$  üzerinde topoloji olması için  $U$  ve  $V$  hangi koşulları sağlamalıdır?

**S3.**  $X = \{a, b, c\}$  kümesi üzerinde 5 elemanlı bütün topolojileri yazınız.

**S4.**  $r \in \mathbb{R}$  için  $X_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > r\}$  olsun.  $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset, \dots\} \cup \{X_r : r \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathbb{R}^2$  üzerinde bir topoloji olur mu?

**S5.**  $X \neq \emptyset$  bir küme olsun ve  $X$  üzerinde  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  metriğini şöyle tanımlayalım. Her  $x \in X$  için  $d(x, x) = 0$  ve her  $x, y \in X$  öyleki  $x \neq y$  için  $d(x, y) = 1$  olsun. Bu metriğe ayrık metrik denir.  $d$  nin ürettiği topolojinin, ayrık topoloji olduğunu kanıtlayınız.

**S6.**  $X = \{1, 2, 3\}$  olsun.  $X$  üzerindeki  $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ ,  $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  topolojiler metriklenebilir topolojiler midir?

**S7.**  $(X, \mathcal{T})$  bir topolojik uzay olsun.  $\mathcal{T}$  ayrık topolojidir ancak ve ancak her  $x \in X$  için  $\{x\} \in \mathcal{T}$ . Kanıtlayınız.

**S8.**  $X$  bir küme olsun.  $X$  üzerinde tanımlanmış iki topolojinin kesişimi de topoloji midir? İki topolojinin birleşimi topoloji midir?

**S9**  $X$  bir küme olsun ve  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$   $X$  üzerinde iki tane topoloji olsun. Eğer  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  ise  $\mathcal{T}_2$ ,  $\mathcal{T}_1$  den daha güçlüdür denir.  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  den daha zayıftır denir. Herhangi bir  $X \neq \emptyset$  için en güçlü ve en zayıf topolojiyi bulunuz.